1 Théorème de Bernouilli-L'Hospital

Soit $a \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions dérivables dans un intervalle ouvert contenant a telles que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ (ou ∞) alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ce théorème s'applique également aux cas où $x \to \infty$ (ou $x \to -\infty$).

Remarque :
Cette règle s'applique également
1) si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$;
2) si l'on a affaire à une limite où x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$

Exemple :
1) La limite $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16} = \dfrac{4^2 - 8 \cdot 4 + 16}{4^2 - 16} = \dfrac{0}{0}$ est indéterminée.

On peut lever cette indétermination grâce au théorème de Bernouilli-L'Hospital :

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16} = \lim_{x \to 4} \frac{(x^2 - 8x + 16)'}{(x^2 - 16)'} = \lim_{x \to 4} \frac{2x - 8}{2x} = \frac{0}{8} = 0$$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = ?$